Opérateurs sans multiplicité

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Hommage à Monsieur S. Mazur

Introduction

Dans la monographie [A], n° IX. 3, on a montré que certains aspects de la théorie des matrices finies peuvent être retrouvés dans l'étude de certaines classes d'opérateurs de l'espace de Hilbert. Le but de cette Note est de poursuivre la recherche de ces analogies.

On s'occupera en particulier d'opérateurs T „sans multiplicité". L'une des caractérisations de ces opérateurs est qu'il n'y a pas de sous-espaces invariants $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ ($\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2$) tels que les restrictions $T|\mathfrak{L}_1$ et $T|\mathfrak{L}_2$ soient quasi-similaires. (Pour la définition de la quasi-similitude, cf. [A].)

Nous montrerons que la plupart des caractérisations qu'on obtient pour tels opérateurs dans les espaces de dimension finie, gardent leur validité aussi pour les opérateurs des classes $C_0(N)$ ($N=1, 2, \cdots$) dans l'espace de Hilbert (de dimension finie ou infinie), si l'on remplace la fonction matricielle $T-\lambda I$ et le polynôme minimum par la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$ et la fonction intérieure minimum, selon les cas.

Il est manifeste que pour les opérateurs dans les espaces de dimension finie la notion de la quasi-similitude coïncide avec celle de la similitude. Nous montrerons au n° 8 que pour les opérateurs des classes $C_0(N)$ cela n'est plus le cas.

Observons que de tout opérateur T dans l'espace euclidien E^N de dimension finie N on obtient un opérateur $T'=\alpha T$ de classe $C_0(N)$ si l'on choisit le facteur numérique $\alpha \neq 0$ tel que $\|T'\|<1$. Ainsi, les résultats sur les opérateurs de classe $C_0(N)$ s'appliquent aussi aux opérateurs dans E^N. Dans ce cas la fonction minimum de T' sera un produit fini de Blaschke; le produit des numérateurs de ce produit fournit alors le polynôme minimum de T', d'où le polynôme minimum de T résulte d'une manière évidente. Nous laissons au lecteur de se rendre compte des détails de cette réduction. Nous préférons de rechercher les opérateurs dans des espaces de dimension finie d'une manière directe, en nous appuyant sur les méthodes classiques de la théorie des matrices finies. Ce sera l'objet du n° 1. Les opérateurs de classe $C_0(N)$ seront étudiés dans les numéros ultérieurs, sauf le n° 3 qui contient un lemme sur les fonctions intérieures.

1. Matrices finies

1. Soit T une matrice finie de type de Jordan:

$$T = (\lambda_1 I_{m_1} + J_{m_1}) \dotplus \cdots \dotplus (\lambda_r I_{m_r} + J_{m_r}) \tag{1. 1}$$

où I_m désigne la matrice unité et J_m désigne la matrice auxiliaire, de rang m.[1] Considéré comme opérateur dans l'espace euclidien complexe E^N de dimension $N = m_1 + \cdots + m_r$, T à les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$, comptées conformément à leurs multiplicités.

Le déterminant de $\lambda I_N - T$ est égal à

$$D_T(\lambda) = \prod_1^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

tandis que le polynôme minimum de T est

$$M_T(\lambda) = \prod_1^s (\lambda - \mu_k)^{n_k}$$

où μ_k parcourt les valeurs propres différentes de T et l'exposant n_k est égal au maximum des exposants m_i correspondant aux valeurs λ_i égales à μ_k.

Pour qu'on ait $D_T = M_T$ il faut et il suffit donc que toutes les valeurs propres de T soient *simples.*

Observons aussi que, dans le cas général, le polynôme minimum de T est égal à celui de la matrice

$$T' = (\mu_1 I_{n_1} + J_{n_1}) \dotplus \cdots \dotplus (\mu_s I_{n_s} + J_{n_s})$$

dont les valeurs propres sont simples. Regardé comme opérateur, T' peut être considéré comme la restriction de T à un sous-espace invariant. Il y a éventuellement plusieurs sous-espaces invariants de ce type, par exemple dans le cas où il y a, parmi les nombres m_i correspondant aux λ_i égaux à la même valeur μ_k, plusieurs qui atteignent le maximum n_k.

2. Cherchons des conditions pour qu'un vecteur x soit cyclique pour T, c'est-à-dire que $x, Tx, T^2x, \cdots$ sous-tendent l'espace E^N.

A cette fin, observons d'abord que pour un polynôme $p(\lambda)$ quelconque on a

$$p(T) = \dotplus_{1 \leq i \leq r} \left[p(\lambda_i) I_{m_i} + \frac{1}{1!} p'(\lambda_i) J_{m_i} + \cdots + \frac{1}{(m_i - 1)!} p^{(m_i - 1)}(\lambda_i) J_{m_i}^{m_i - 1} \right]. \tag{1. 2}$$

Numérotons les composantes des vecteurs $x \in E^N$ conformément à la décomposition en somme directe (1. 1), par deux indices:

$$x = (x_{11}, \ldots, x_{1m_1}; x_{21}, \ldots, x_{2m_2}; \ldots; x_{r1}, \ldots, x_{rm_r}).$$

[1] $J_m = (a_{ik})$ $(i, k = 1, \ldots, m)$, avec $a_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, m-1$ et $a_{ik} = 0$ pour les autres pairs i, k.

En vertu de (1. 2) on a alors pour $y=p(T)x$:

$$(1.3)\quad \begin{cases} y_{i1} = p(\lambda_i)x_{i1}+\frac{1}{1!}p'(\lambda_i)x_{i2}+\cdots & \cdots+\frac{1}{(m_i-1)!}p^{(m_i-1)}(\lambda_i)x_{im_i}, \\ y_{i2} = \qquad\qquad p(\lambda_i)x_{i2}+\cdots & \cdots+\frac{1}{(m_i-2)!}p^{(m_i-2)}(\lambda_i)x_{im_i}, \\ \vdots & \\ y_{im_i} = & p(\lambda_i)x_{im_i} \end{cases}$$

$(i=1,\cdots,r)$. Lorsque $x_{im_i}=0$ pour un i, on a donc $y_{im_i}=0$ et cela pour tout polynôme p. On en déduit que si x est un vecteur *cyclique* pour T, on a nécessairement $x_{im_i}\neq 0$ pour $i=1,\cdots,r$. Cela entraîne, à son tour, que les valeurs propres de T sont toutes simples. En effet, si $1\leqq a<b\leqq r$, le vecteur $z\in E^N$ défini par

$$z_{am_a}=x_{bm_b},\quad z_{bm_b}=-x_{am_a},\quad z_{ij}=0\quad \text{pour les autres}\quad i,j,$$

est différent de 0 et pour $y=p(T)x$ on a

$$(y,z)=p(\lambda_a)x_{am_a}\cdot\overline{x_{bm_b}}+p(\lambda_b)x_{bm_b}\cdot(\overline{-x_{am_a}})=[p(\lambda_a)-p(\lambda_b)]x_{am_a}\overline{x_{bm_b}};$$

si l'on avait $\lambda_a=\lambda_b$, z serait donc orthogonal à $p(T)x$ quel que soit p, ce qui contredirait l'hypothèse que x est cyclique. Donc $\lambda_a\neq\lambda_b$.

Inversement, si les valeurs propres de T sont simples, tout vecteur $x\in E^N$ tel que $x_{im_i}\neq 0$ $(i=1,\cdots,r)$, est cyclique pour T. Cela veut dire que, x étant fixé de cette façon, pour tout vecteur $y\in E^N$ il existe un polynôme p vérifiant le système d'équations (1. 3). Or, ce système se réduit évidemment à un système de la forme

$$p(\lambda_i)=t_{i1},\ p'(\lambda_i)=t_{i2},\ldots,\ p^{(m_i-1)}(\lambda_i)=t_{im_i}\qquad (i=1,\ldots,r),$$

les valeurs t_{ij} dérivant des composantes des vecteurs x et y. Il s'agit donc d'un problème d'interpolation d'Hermite, et ce problème a pour solution un polynôme p, même de degré $\leqq N-1$.

Donc, une condition nécessaire et suffisante pour que T admette un vecteur cyclique, est que les valeurs propres de T soient simples.

De plus, s'il existe un vecteur cyclique pour T, tous les vecteurs x sont cycliques sauf peut-être les vecteurs situés dans un nombre fini $(\leqq N)$ de sous-espaces de E^N, de dimension $N-1$; ainsi, l'ensemble des vecteurs cycliques est ou bien vide ou bien dense dans E^N.

3. En supposant que les valeurs propres de T sont simples (c'est-à-dire $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ des valeurs différentes), cherchons de déterminer les sous-espaces invariants pour T. Soit x un vecteur fixé dans E^N. Si les composantes $x_{i1},\cdots,x_{im_i}$ ne sont pas toutes égales à 0, soit x_{ik_i} la dernière entre elles qui n'est pas 0; autrement on pose $k_i=0$. En se servant toujours de l'interpolation d'Hermite on déduit des équations (1. 3) que si p parcourt les polynômes, $y=p(T)x$ parcourt les vecteurs dont les composantes

$$y_{ij} \quad (k_i < j \leqq m_i; \quad i = 1, \dots, r)$$

sont 0 et les autres arbitraires. L'ensemble de ces y est un sous-espace de E^N qui est évidemment déterminé par les nombres $k_1, \cdots, k_r$; désignons-le par $\mathfrak{L}(k_1, \cdots, k_r)$. En faisant x varier, on conclut aussitôt que les sous-espaces invariants pour T sont précisément les sous-espaces $\mathfrak{L}(k_1, \cdots, k_r)$ où les nombres k_i peuvent être préscrits arbitrairement sous la condition $0 \leqq k_i \leqq m_i$ $(i=1, \cdots, r)$.

Le polynôme minimum de la restriction de l'opérateur T à $\mathfrak{L}(k_1, \cdots, k_r)$, qui doit être un diviseur de $M_T(\lambda)$, est évidemment égal à

$$M(\lambda) = \prod_1^s (\lambda - \lambda_i)^{k_i}.$$

Ainsi, si les valeurs propres de T sont simples, il y a une correspondance biunivoque entre les diviseurs $M(\lambda)$ de $M_T(\lambda)$ et les sous-espaces invariants pour T. Notamment, pour tout diviseur $M(\lambda)$ il existe un sous-espace invariant $\mathfrak{L}$ et un seul tel que la restriction de T à $\mathfrak{L}$ ait le polynôme minimum $M(\lambda)$; notamment

$$\mathfrak{L} = \{x: M(T)x = 0\}.$$

Inversement, cette propriété caractérise les opérateurs T dont toutes les valeurs propres sont simples. Il suffit même de savoir qu'il n'existe pas de sous-espace non-banal $\mathfrak{L}$, invariant pour T, tel que $T|\mathfrak{L}$ ait le même polynôme minimum que T.

A cet effet, rappelons le fait, observé dans le paragraphe 1, que pour tout T il existe un sous-espace invariant $\mathfrak{L}'$ tel que $T' = T|\mathfrak{L}'$ ait le même polynôme minimum que T et que les valeurs propres de T' soient simples. Sous l'hypothèse faite sur T, $\mathfrak{L}'$ ne peut être différent de l'espace entier, donc $T' = T$ et par conséquent T a ses valeurs propres simples.

4. Deux opérateurs similaires dans des espaces de dimension finie ont évidemment le même polynôme minimum. Il s'ensuit que si T jouit de la propriété que ses restrictions à des sous-espaces invariants différents ont des polynômes minimum différents, alors T jouit aussi de la propriété que ses restrictions à des sous-espaces différents ne sont pas similaires.

Inversement, cette dernière propriété entraîne que les valeurs propres de T sont simples et alors aussi la première propriété. En effet, si x_a, x_b étaient des vecteurs propres linéairement indépendants de T, correspondant à la même valeur propre, les sous-espaces unidimensionnels $\{cx_a\}$, $\{cx_b\}$ (c complexe) seraient différents, mais les restrictions de T à ces sous-espaces seraient similaires (même unitairement équivalentes).

5. Observons encore que si le vecteur x_0 est cyclique pour T et si X est un opérateur permutant à T, Xx_0 est la combinaison linéaire d'un nombre fini des vecteurs $T^i x_0$ $(i=0, 1, \cdots)$, soit $Xx_0 = a_0 x_0 + a_1 T x_0 + \cdots + a_\nu T^\nu x_0$, d'où $XT^i x_0 = = T^i X x_0 = (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_\nu T^\nu) T^i x_0$ et par conséquent $X = q(T)$ avec $q(\lambda) = = a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_\nu \lambda^\nu$: X est un polynôme de T.

Inversement, si T jouit de la propriété que tout opérateur X tel que $TX = XT$, est un polynôme de T, alors les valeurs propres de T sont simples (et par conséquent il existe un vecteur cyclique). En effet, soit E_a la somme directe, analogue à celle fournissant T (cf. (1. 1)), dont le a-ième terme est égal à I_{m_a} et les autres égaux aux matrices O de rang correspondant. E_a permute à T, mais si T a des valeurs propres multiples, p.ex. si $\lambda_a = \lambda_b$ $(a \neq b)$, E_a n'est pas de la forme $p(T)$, parce que les éléments diagonaux de $p(T)$ sont égaux à la même valeur $p(\lambda_a)$ dans la a-ième et dans la b-ième cellule.

6. Comme tout opérateur T dans un espace $\mathfrak{H}$ de dimension finie a, par rapport à une base convenable, la matrice de type (1. 1), on peut résumer les résultats obtenus comme il suit:

Théorème I. *Pour tout opérateur T dans un espace de dimension finie $\mathfrak{H}$, il existe un sous-espace invariant $\mathfrak{H}_0$ tel que les valeurs propres de $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$ sont toutes simples et que M_{T_0} soit égal à M_T.*

Théorème II. *Pour un opérateur T dans un espace $\mathfrak{H}$ de dimension finie les conditions suivantes sont équivalentes:*

(o) *toutes les valeurs propres de T sont simples;*

(i) *il existe un vecteur cyclique pour T;*

(ii) *le polynôme minimum de T est égal au déterminant de $\lambda I - T$ par rapport à une base quelconque dans $\mathfrak{H}$: $M_T(\lambda) = D_T(\lambda)$;*

(iii) *pour tout diviseur M du polynôme minimum M_T il existe un sous-espace $\mathfrak{L}$ invariant pour T et un seul tel que le polynôme minimum de $T|\mathfrak{L}$ soit égal à M, notamment le sous-espace $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_M$ où*

$$\mathfrak{H}_M = \{x : x \in \mathfrak{H},\ M(T)x = 0\};$$

(iv) *il n'y a pas de sous-espace propre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T, tel que $M_{T|\mathfrak{L}}$ soit égal à M;*

(v) *il n'y a pas des sous-espaces $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ $(\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2)$ invariants pour T, tels que $T|\mathfrak{L}_1$ et $T|\mathfrak{L}_2$ soient similaires;*

(vi) *tout opérateur X permutant à T est un polynôme de T: $X = q(T)$.*

Définition. Les opérateurs T dans des espaces de dimension finie, vérifiant les conditions équivalentes (o)—(vi), seront appelés *sans multiplicité*.

Théorème III. *Pour tout opérateur T dans un espace de dimension finie $\mathfrak{H}$, l'ensemble des vecteurs cycliques est ou bien vide, ou bien dense dans $\mathfrak{H}$.*

Pour terminer ajoutons la remarque suivante, conséquence immédiate de la forme de Jordan des matrices: *si T_1 et T_2 sont sans multiplicité, ils sont similaires si leurs polynômes minimum coïncident, et dans ce cas seulement.*

2. Opérateurs de classe $C_0(N)$. Théorèmes et corollaires

Dans la suite nous cherchons les analogues des propriétés établies ci-dessus, pour certains opérateurs dans des espaces de Hilbert $\mathfrak{H}$ (de dimension finie ou infinie). Nous allons envisager notamment les classes $C_0(N)$ $(N=0, 1, \cdots)$ composées des opérateurs dans $\mathfrak{H}$ tels que

$$\|T\| \leqq 1, \quad T^n \to O \quad \text{et} \quad T^{*n} \to O \quad (n \to \infty)$$

(c'est-à-dire $T \in C_{00}$) et que les sous-espaces de défaut

$$\mathfrak{D}_T = \overline{D_T \mathfrak{H}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*} \mathfrak{H}}$$

sont de dimension N; D_T et D_{T^*} désignent les opérateurs de défaut

$$D_T = (I - T^* T)^{1/2}, \quad D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}. \text{ [2]}$$

Rappelons quelques faits sur les opérateurs de classe $C_0(N)$, établis dans [A].

$C_0(N)$ est comprise dans la classe C_0 des contractions T complètement non-unitaires, pour lesquelles il existe une fonction intérieure $u(\lambda)$ (dans le disque unité) [3]) telle que $u(T)=O$; parmi ces fonctions il y a une qui divise les autres; cette fonction, déterminée à coïncidence près, est appelée la fonction minimum de T et est désignée par $m_T(\lambda)$.

Pour $T \in C_0(N)$, la fonction „caractéristique"

$$\Theta_T(\lambda) = [-T + D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T] | \mathfrak{D}_T$$

est une fonction analytique à valeurs contractions de $\mathfrak{D}_T$ dans $\mathfrak{D}_{T^*}$, intérieure des deux côtés (c'est-à-dire que $\Theta_T(e^{it})$ est un opérateur unitaire de $\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{D}_{T^*}$

---

[2]) L'égalité des dimensions des sous-espaces de défaut $\mathfrak{D}_T$ et $\mathfrak{D}_{T^*}$ s'ensuit déjà de ce que $T \in C_{00}$, conséquence de [A], théorème II. 1. 2 et proposition I. 2. 1.

[3]) On désigne par H^∞ l'ensemble des fonctions scalaires $u(\lambda)$, holomorphes et bornées dans le disque $|\lambda| < 1$. La fonction $u \in H^\infty$ est *intérieure* si ses valeurs limites (non-tangentielles) sur le cercle unité sont p.p. de module 1. Pour deux fonctions intérieures, on dit qu'elles *coïncident*, lorsqu'elles ne diffèrent qu'en un facteur constant près (de module 1). Les fonctions intérieures forment, par rapport à la multiplication usuelle, un semi-groupe commutatif, avec l'élément unité $u(\lambda) \equiv 1$. Toute notion arithmétique (multiple, diviseur, etc.) pour les fonctions intérieures sera entendue par rapport à cette structure de semi-groupe.

en presque tous les points du cercle unité). Le déterminant $d_T(\lambda)$ de la matrice de $\Theta_T(\lambda)$, prise par rapport à deux bases orthonormales quelconques dans les espaces de défaut, est une fonction scalaire intérieure telle que $d_T(T)=O$ (l'analogue du théorème de Cayley—Hamilton pour les matrices finies). La fonction minimum m_T s'obtient comme le quotient de d_T par le plus grand diviseur commun intérieur des mineurs d'ordre $N-1$ de la matrice de Θ_T (dans le cas $N=1$ on a $m_T=d_T$); cf. [A], théorème VI. 5. 2.

La restriction T' d'un opérateur $T\in C_0(N)$ à un sous-espace invariant est d'une classe $C_0(N')$ avec $N'\leqq N$ (cf. [A], n° IX. 3).

Notre but principal dans cette Note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Pour tout opérateur T de classe $C_0(N)$ dans $\mathfrak{H}$ il existe un sous-espace $\mathfrak{H}_0$ invariant pour T, tel que la restriction $T_0=T|\mathfrak{H}_0$ ait un vecteur cyclique dans $\mathfrak{H}_0$ et que $m_{T_0}=m_T$.*

Théorème 2. *Pour un opérateur $T\in C_0(N)$ dans l'espace $\mathfrak{H}$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *il existe un vecteur cyclique pour T;*

(ii) $m_T=d_T$; [4])

(iii) *pour tout diviseur intérieur u de m_T il existe un sous-espace $\mathfrak{H}_u$ invariant pour T et un seul tel que $m_{T|\mathfrak{H}_u}=u$, il est donné notamment par*

$$\mathfrak{H}_u=\{h\colon h\in\mathfrak{H},\, u(T)h=0\};$$

(iv) *il n'y a pas de sous-espace propre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T et tel que $m_{T|\mathfrak{L}}=m_T$;*

(v) *il n'y a pas de sous-espaces différents $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$, invariants pour T et tels que $T|\mathfrak{L}_1$ et $T|\mathfrak{L}_2$ soient quasi-similaires;*

(vi) *tout opérateur borné X permutant à T est une fonction de T: $X=\varphi(T)$ où $\varphi\in N_T$.* [5])

Ce théorème suggère la définition suivante:

Définition. Les opérateurs $C_0(N)$ (N quelconque) vérifiant les conditions équivalentes (i)—(vi) seront appelés *sans multiplicité*.

---

[4]) Pour des fonctions intérieures nous utilisons le signe d'égalité pour indiquer qu'elles coïncident.

[5]) N_T est la classe des fonctions $\varphi=\dfrac{u}{v}$ telles que $u\in H_T^\infty$ et $v\in K_T^\infty$, et on définit:

$$\varphi(T)=v(T)^{-1}u(T);$$

cf. [A], chap. IV (là, on suppose aussi que φ soit holomorphe dans $|\lambda|<1$, mais cette restriction est superflue).

Remarque 1. Le problème de savoir si pour un opérateur $T \in C_0(N)$ dans $\mathfrak{H}$ l'ensemble des vecteurs cycliques est ou bien vide ou bien dense dans $\mathfrak{H}$, est laissé ouvert. (Pour des opérateurs de type général, cet ensemble peut être non-vide *et* non-dense.) [6])

La démonstration des théorèmes 1 et 2 fera l'objet des numéros suivants. Tout d'abord on établira un lemme appartenant à l'arithmétique des fonctions intérieures, dont on fera usage dans la démonstration du théorème 1.

Remarque 2. Si $T \in C_0(N)$ et $\sigma(T)=\{1\}$, alors $m_T = e_a$ avec $a>0$. Ici on fait usage de la notation

$$e_s(\lambda) = \exp\left(s\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \qquad (s \geqq 0);$$

cf. [A], chap. III. Les diviseurs intérieurs de e_a étant les fonctions e_s $(0 \leqq s \leqq a)$, ces diviseurs font un système ordonné par rapport à la divisibilité et par conséquent les sous-espaces

$$\mathfrak{H}_s = \{h\colon e_s(T)h = 0\} \qquad (0 \leqq s \leqq a),$$

invariants pour T, forment un système ordonné par rapport à l'inclusion. Si T est unicellulaire, il n'y a pas d'autres sous-espaces invariants pour T (cf. [A], proposition III. 7. 5), donc T vérifie la condition (iii) du théorème 2, donc T est sans multiplicité. Inversement, si T est sans multiplicité, il n'y a pas en vertu de (iii) d'autres sous-espaces invariants, donc T est unicellulaire. Ainsi, *pour* $T \in C_0(N)$ *avec* $\sigma(T)=\{1\}$, *les conditions d'être sans multiplicité et d'être unicellulaire sont équivalentes.* (Cf. [A], théorème IX. 3. 4.)

3. Un lemme sur l'arithmétique des fonctions intérieures

Lemme. *Soient* $u_1, \ldots, u_N$ *des fonctions intérieures. On peut attacher à chaque* u_k *des diviseurs intérieurs* v_k, v_k' *de* u_k *de sorte qu'on ait*

$$\text{a)} \quad v_k \wedge v_m = 1 \ (k \neq m), \qquad v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_N = u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_N,$$

et

$$\text{b)} \quad v_k' \wedge v_m' = 1 \ (k \neq m), \qquad v_1' \vee v_2' \vee \cdots \vee v_N' = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_N. \quad ^{7)}$$

Démonstration. Nous envisagerons seulement l'assertion a); l'assertion b) se démontre d'une manière analogue. D'ailleurs, on fera usage dans la suite seulement de l'assertion a).

[6]) C'est le cas, par exemple, pour la translation unilatérale simple $(x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots)$ dans l'espace complexe l^2.

[7]) On indique par $\wedge$ et $\vee$ le plus grand diviseur intérieur commun, et le plus petit multiple intérieur commun, selon les cas.

Posons, pour abréger, $u_* = u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_N$.

1) Supposons d'abord que u_* est un produit de Blaschke; l'ensemble des zéros de u_* dans le disque unité ouvert soit désigné par A. Soit $r_*(a)$ la multiplicité du point $a \in A$ comme zéro de $u_*(\lambda)$, et soit $r_k(a)$ sa multiplicité comme zéro de $u_k(\lambda)$. On a

$$0 \leqq r_k(a) \leqq r_*(a) \quad \text{et} \quad r_*(a) = \max\{r_1(a), \ldots, r_N(a)\}.$$

Définissons, pour $k = 1, \cdots, N$,

$$A_k = \{a\colon a \in A, r_*(a) = r_k(a), r_*(a) > r_i(a) \text{ pour } i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Les ensembles A_k sont disjoints et leur réunion est égale à A.

Soit v_k le produit de Blaschke attaché aux zéros $a \in A_k$, chacun de multiplicité $r_*(a)$. Les propriétés a) découlent d'une manière évidente de ce que $A_k \cap A_m = \emptyset$ $(k \neq m)$ et que $\bigcup_1^N A_k = A$. De plus, comme $v_k(\lambda)$ n'a pas de zéros en dehors de A_k et que les points $a \in A_k$ sont, comme zéros de $v_k(\lambda)$ et $u_k(\lambda)$, de la même multiplicité (égale à $r_*(a)$), on conclut que v_k est un diviseur de u_k.

2) Supposons ensuite que u_* est une fonction intérieure de type

$$u_*(\lambda) = \exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\, d\mu_{*t}\right]$$

où μ_* est une mesure borélienne non-négative finie dans $[0,2\pi)$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Les fonctions u_k (diviseurs de u_*) sont alors de même type; la mesure attachée à u_k soit μ_k. Comme μ_k est majorée par μ_*, on a

$$\mu_k(\omega) = \int_\omega r_k(t)\, d\mu_{*t} \qquad (k = 1, \ldots, N; \quad \omega \text{ borélien dans } [0,2\pi)),$$

les fonctions $r_k(t)$ étant boréliennes, définies p.p. par rapport à μ_*, et telles que $0 \leqq r_k(t) \leqq 1$; de plus on a p.p. par rapport à μ_*

$$\max\{r_1(t), \ldots, r_N(t)\} = 1.$$

Soit

$$A_k = \{t\colon t \in [0,2\pi), r_k(t) = 1, r_i(t) < 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Les ensembles $A_1, \cdots, A_N$ fournissent une décomposition de $[0,2\pi)$ en des parties boréliennes disjointes (modulo des ensembles de μ_*-mesure nulle).

Définissons:

$$v_k(\lambda) = \exp\left[-\int_{A_k} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\, d\mu_{*t}\right] \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Les relations a) en résultent aussitôt. De plus v_k est un diviseur de u_k. Cela s'ensuit de ce que, pour ω borélien quelconque,

$$\mu_*(\omega \cap A_k) = \int_{\omega \cap A_k} d\mu_{*t} = \int_{\omega \cap A_k} r_k(t)\, d\mu_{*t} \leqq \int_\omega r_k(t)\, d\mu_{*t} = \mu_k(\omega).$$

3) Le cas général résulte des cas particuliers précédents en prenant les factorisations $u_k = u_k^{(1)} u_k^{(2)}$ où $u_k^{(1)}$ est le facteur de Blaschke et $u_k^{(2)}$ est le facteur de type „singulier" de u_k. En construisant les fonctions $v_k^{(1)}$ attachées aux $u_k^{(1)}$ d'après 1), et les fonctions $v_k^{(2)}$ attachées aux $u_k^{(2)}$ d'après 2), les produits

$$v_k = v_k^{(1)} \cdot v_k^{(2)} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

fournissent un système de type exigé.

4. Démonstration du théorème 1

Comme $T^{*n} \to O$ $(n \to \infty)$, on a

$$h = \sum_0^\infty T^n(I - TT^*)T^{*n}h \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathfrak{H},$$

d'où il s'ensuit que si l'on choisit dans le sous-espace de défaut $\mathfrak{D}_{T^*}$ (de dimension N) une base quelconque $f_1, \cdots, f_N$, on aura

$$\mathfrak{H} = \bigvee_{i=1}^N \mathfrak{L}_i \quad \text{où} \quad \mathfrak{L}_i = \bigvee_{n=0}^\infty T^n f_i, \tag{4.1}$$

les sous-espaces $\mathfrak{L}_i$ étant invariants pour T. Posons $T_i = T|\mathfrak{L}_i$. D'après [A], proposition III. 6. 2 (qui se généralise du cas de deux sous-espaces au cas d'un nombre quelconque de sous-espaces) on a pour les fonctions minimum correspondantes:

$$m_T = m_{T_1} \vee m_{T_2} \vee \cdots \vee m_{T_N}.$$

Posons $u_i = m_{T_i}$ $(i = 1, \cdots, N)$ et choisissons pour chaque u_i un diviseur intérieur v_i selon le lemme, et soit $w_i = u_i/v_i$. Posons

$$f_i' = w_i(T)f_i \quad (i = 1, \ldots, N) \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_i' = \bigvee_{n=0}^\infty T^n f_i'.$$

On a alors évidemment

$$\mathfrak{L}_i' = \overline{w_i(T)\mathfrak{L}_i} = \overline{w_i(T_i)\mathfrak{L}_i},$$

d'où il s'ensuit que $\mathfrak{L}_i'$ est invariant pour T_i. De plus on a

$$v_i(T_i)\mathfrak{L}_i' \subset \overline{v_i(T_i)w_i(T_i)\mathfrak{L}_i} = \overline{u_i(T_i)\mathfrak{L}_i} = \{0\} \quad \text{puisque} \quad u_i = m_{T_i},$$

donc en posant $T_i' = T_i|\mathfrak{L}_i'$ $(= T|\mathfrak{L}_i')$ on a $v_i(T_i') = O$ et par conséquent v_i est divisible par $m_{T_i'}$:

$$v_i = m_{T_i'} \cdot p_i \quad \text{(avec } p_i \text{ intérieure).}$$

Soit

$$T_i = \begin{bmatrix} T_i' & * \\ O & T_i'' \end{bmatrix}$$

la triangulation de T_i correspondant à la décomposition $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_i' \oplus \mathfrak{L}_i''$. Comme $\mathfrak{L}_i' = \overline{w_i(T_i)\mathfrak{L}_i}$, on a

$$\mathfrak{L}_i'' = \{h\colon h \in \mathfrak{L}_i,\, w_i(T_i)^* h = 0\} = \{h\colon h \in \mathfrak{L}_i,\, w_i^{\sim}(T_i^*)h = 0\}.^{8)}$$

Cela entraîne que $T_i''^*$ $(= T_i^*|\mathfrak{L}_i'')$ a sa fonction minimum égale à $w_i^{\sim}$. Donc

$$m_{T_i''} = w_i.$$

Or on sait que m_{T_i} est un diviseur de $m_{T_i'} \cdot m_{T_i''}$ (*cf.* [A], proposition III. 6. 1); par conséquent $u_i p_i$ $(= m_{T_i} p_i)$ est un diviseur de u_i $(= v_i w_i = m_{T_i'} p_i \cdot m_{T_i''})$. Cela entraîne $p_i = 1$ $(i = 1, \cdots, N)$, donc

$$m_{T_i'} = v_i.$$

Posons

$$g = \sum_1^N f_i', \quad \mathfrak{H}_0 = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n g, \quad T_0 = T|\mathfrak{H}_0 \quad \text{et} \quad p = m_{T_0}.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^N p(T) f_i' = p(T) g = p(T_0) g = 0,$$

d'où

$$\mathfrak{L}_j' \ni p(T) f_j' = - \sum_{i \neq j} p(T) f_i' \in \bigvee_{i \neq j} \mathfrak{L}_i',$$

donc

$$p(T) f_j' \in \mathfrak{M}_j \quad \text{où} \quad \mathfrak{M}_j = \mathfrak{L}_j' \cap \Big(\bigvee_{i \neq j} \mathfrak{L}_i'\Big).$$

$\mathfrak{M}_j$ est invariant pour T et la fonction minimum q_j de $T|\mathfrak{M}_j$ est un diviseur commun de v_j et de $\bigvee_{i \neq j} v_i$; puisque $v_j \wedge v_i = 1$ pour $i \neq j$, cela entraîne $q_j = 1$, d'où $\mathfrak{M}_j = \{0\}$ et par conséquent $p(T) f_j' = 0$. Comme

$$\mathfrak{L}_j' = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f_j',$$

il en dérive que $p(T)\mathfrak{L}_j' = \{0\}$, donc $p(T_j') = O$. Ainsi, p est divisible par $v_j = m_{T_j'}$

8) On se sert de la notation $u^{\sim}(\lambda) = \overline{u(\bar{\lambda})}$.

$(j=1, \cdots, N)$ et par conséquent aussi par $v_1 \vee v_2 \vee \cdots \vee v_N = u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_N = m_T$. D'autre part, $p\,(=m_{T_0})$ est un diviseur de m_T. On conclut que

$$p = m_T, \quad m_{T_0} = m_T.$$

Le sous-espace $\mathfrak{H}_0$ jouit donc des propriétés énoncés dans le théorème 1: $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$ admet le vecteur cyclique g dans $\mathfrak{H}_0$ et les fonctions minimum de T_0 et T coïncident.

Remarque. Il convient d'observer que cette démonstration porte non seulement pour les opérateurs de classe $C_0(N)$, mais pour toute contraction T dans $\mathfrak{H}$ pour laquelle il existe un nombre fini d'éléments $f_i\,(i=1, \cdots, N)$ de sorte que (1. 1) soit vérifié, ou, en d'autres termes, que $\dim_T \mathfrak{H}$ soit finie (cf. [B]).

5. Démonstration du théorème 2: première partie

Dans cette première partie de la démonstration on établira, pour $T \in C_0(N)$, l'équivalence des conditions (i)—(iv) et cela en démontrant les implications (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (iv) $\to$ (i).

(i) $\to$ (ii): *cf.* [A], proposition IX. 3. 3.

(ii) $\to$ (iii): Soit $\mathfrak{L}$ un sous-espace invariant pour T et posons $u = m_{T|\mathfrak{L}}$. Il est manifeste que

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}_u = \{h\colon h \in \mathfrak{H}, u(T)h = 0\}.$$

Posons $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_u \ominus \mathfrak{L}$ et considérons la triangulation de $T_u = T|\mathfrak{H}_u$ correspondant à la décomposition $\mathfrak{H}_u = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$, soit

$$T_u = \begin{bmatrix} A & * \\ O & B \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$d_{T_u} = d_A \cdot d_B$$

par [A], lemme IX. 3. 1.

Comme c'était montré au cours de la démonstration de la proposition IX. 3. 2 de [A], la condition $m_T = d_T$ entraîne $m_{T_1} = d_{T_1}$ pour toute restriction T_1 de T à un sous-espace invariant. On a donc en particulier

$$d_{T_u} = m_{T_u} \quad \text{et} \quad d_A = d_{T|\mathfrak{L}} = m_{T|\mathfrak{L}}.$$

Or $m_{T|\mathfrak{L}} = u$ par la définition de u et $m_{T_u} = u$ en vertu de [A], théorème III. 6. 3.

Il en résulte que

$$u = u \cdot d_B,$$

donc $d_B = 1$, ce qui entraîne $\mathfrak{M} = \{0\}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}_u$.

(iii) $\to$ (iv): implication évidente.

(iv) $\to$ (i). Soit $\mathfrak{H}_0$ un sous-espace invariant pour T tel que $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$ admet un vecteur cyclique g dans $\mathfrak{H}_0$ et que $m_{T_0} = m_T$; l'existence de tel $\mathfrak{H}_0$ est affirmée par le théorème 1. Or par (iv) l'égalité $m_{T_0} = m_T$ entraîne $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$. Donc g est cyclique pour T dans $\mathfrak{H}$.

6. Quelques conséquences

Avant de compléter la démonstration du théorème 2, nous indiquons quelques conséquences de ce qui a été déjà prouvé.

Proposition 1. *Si un opérateur T de classe $C_0(N)$ admet un vecteur cyclique, il en est de même de T^* ainsi que des restrictions de T à des sous-espaces invariants pour T.*

Démonstration. Pour $T \in C_0(N)$ on a aussi $T^* \in C_0(N)$, avec

$$d_{T^*} = d_T^{\sim} \quad \text{et} \quad m_{T^*} = m_T^{\sim}.$$

La condition (ii) du théorème 1 se transfère donc de T à T^*. D'autre part, la condition (iii) pour T entraîne évidemment la même condition pour la restriction de T à un sous-espace invariant. Ainsi, la proposition résulte de l'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii).

Proposition 2. *Tout opérateur $T \in C_0(N)$ admettant un vecteur cyclique est quasi-similaire à un opérateur $S \in C_0(1)$.*

Démonstration. Comme T et (en vertu de la proposition 1) T^* admettent des vecteurs cycliques, il s'ensuit par la proposition 1 de la Note [B] que T et T^* ont des transformées quasi-affines S et S_* de classe $C_0(1)$. T est alors une transformée quasi-affine de $Z = S_*^*$ et par conséquent S est une transformée quasi-affine de Z. Puisque Z appartient à $C_0(1)$ ensemble avec S_*, on a deux opérateurs de classe $C_0(1)$, S et Z, dont S est une transformée quasi-affine de Z, donc, en vertu de [A], Corollaire VI. 5. 3, S et Z sont unitairement équivalents. On conclut que T est quasi-similaire à S.

Proposition 3. *Pour que deux opérateurs $T_i \in C_0(N_i)$ ($i = 1, 2$), admettant des vecteurs cycliques, soient quasi-similaires, il est nécessaire et suffisant que leurs fonctions minimum coïncident.*

Démonstration. La nécessité de la condition $m_{T_1} = m_{T_2}$ résulte comme un cas particulier de [A], proposition III. 4. 6. La suffisance de la condition se démontre comme il suit. Par la proposition 2 ci-dessus il existe des opérateurs S_i ($i = 1, 2$) de classe $C_0(1)$ tels que S_i est quasi-similaire à T_i. Comme $m_{S_1} = m_{T_1} =$

$=m_{T_2}=m_{S_2}$, il s'ensuit de [A], corollaire VI. 5. 3, que S_1 et S_2 sont unitairement équivalents. Il en résulte que T_1 et T_2 sont quasi-similaires au même opérateur S_1, donc aussi quasi-similaires l'un à l'autre.

Proposition 4. *Tout sous-espace invariant $\mathfrak{H}_0$ vérifiant le théorème 1 est maximal dans le sens que si $\mathfrak{H}_1$ est un sous-espace invariant pour T, comprenant $\mathfrak{H}_0$ et tel que $T_1=T|\mathfrak{H}_1$ admet un vecteur cyclique, on a $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_0$.*

Démonstration. Comme $T_0=T|\mathfrak{H}_0$ peut être considéré comme une restriction de T_1 qui, à son tour, est une restriction de T, m_{T_0} est un diviseur de m_{T_1} et m_{T_1} est un diviseur de m_T. Puisque $m_{T_0}=m_T$, cela entraîne $m_{T_0}=m_{T_1}$. En vertu de l'équivalence des conditions (i) et (iv) (appliquée à T_1) on a donc $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}$.

7. Démonstration du théorème 2 : conclusion

Pour achever la démonstration du théorème 2 il suffit d'établir les implications suivantes: (iii)$\to$(v)$\to$(i)$\to$(vi)$\to$(i).

(iii)$\to$(v): C'est évident puisque les fonctions minimum de deux contractions quasi-similaires, de classe C_0, coïncident; cf. [A], proposition III. 4. 6.

(v)$\to$(i): Soit $\mathfrak{H}_0$ le sous-espace invariant pour T, vérifiant le théorème 1, donc tel que $T_0=T|\mathfrak{H}_0$ admet un vecteur cyclique et que $m_{T_0}=m_T$. Il s'agit de montrer que $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}$.

Or, dans le cas contraire il existe un $h\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{H}_0$, $h\neq 0$. Soit $\mathfrak{L}_1$ le sous-espace invariant pour T, engendré par h, et soit $T_1=T|\mathfrak{L}_1$; T_1 admet alors le vecteur cyclique h et m_{T_1} est un diviseur de m_T, donc de m_{T_0}. Par conséquent il existe un sous-espace $\mathfrak{L}_2$ de $\mathfrak{H}_0$, invariant pour T_0 et tel que, en posant $T_2=T_0|\mathfrak{L}_2$ $(=T|\mathfrak{L}_2)$, on a $m_{T_2}=m_{T_1}$. Comme T_0 admet un vecteur cyclique, il en est de même de T_2 en vertu de la proposition 1 du n° précédent. Ainsi, T_1 et T_2 admettent des vecteurs cycliques et $m_{T_1}=m_{T_2}$. Comme $T\in C_0(N)$ entraîne aussi $T_i\in C_0(N_i)$ $(0\leqq N_i\leqq N)$, il s'ensuit de la proposition 3 du numéro précédent que T_1 et T_2 sont quasi-similaires. Comme, évidemment, $\mathfrak{L}_1\neq\mathfrak{L}_2$, nous sommes aboutis à une contradiction avec (v). Ainsi, $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}$.

(i)$\to$(vi): En vertu de la proposition 2 du numéro précédent, T est quasi-similaire à un opérateur $S\in C_0(1)$, donc il y a des quasi-affinités A, B telles que

$$AS=TA,\quad BT=SB. \tag{7. 1}$$

Soit X un opérateur borné quelconque tel que $XT=TX$. Grâce à (7. 1) on a alors

$$SBXA=BXAS,$$

donc il résulte par le théorème de SARASON [S] (*cf.* aussi [C]) que BXA est une fonction de S:

(7. 2) $$BXA = u_X(S) \quad \text{où} \quad u_X \in H^\infty.$$

Comme $AS = TA$ entraîne $Au(S) = u(T)A$ pour $u \in H^\infty$ quelconque, on déduit de (7. 2) que

$$ABXA = Au_X(S) = u_X(T)A,$$

d'où, vu que le domaine de A est dense,

(7. 3) $$ABX = u_X(T).$$

Dans le cas particulier $X = I$ cela donne

(7. 4) $$AB = u_I(T).$$

Comme AB est une quasi-affinité, $u_I(T)$ admet un inverse à domaine dense, donc u_I appartient à la classe des fonctions K_T^∞ (cf. [A], n° III. 3. 2). Comme de plus $u_X \in H^\infty = H_T^\infty$, il résulte de (7. 3) et (7. 4) que

$$X = \varphi(T) \quad \text{où} \quad \varphi = u_X/u_I \in N_T.$$

(vi) $\to$ (i): D'après le theorème 1 il existe un sous-espace $\mathfrak{H}_0$ tel que $T_0 = T|\mathfrak{H}_0$ admet un vecteur cyclique et que $m_{T_0} = m_T$. Il s'agit de montrer que (vi) entraîne $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0 \neq \{0\}$. D'après la proposition 2, T_0 est quasi-similaire à un opérateur $S \in C_0(1)$ dans un espace $\mathfrak{G}$. Donc il existe une quasi-affinité A_0 de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{H}_0$ telle que $T_0A_0 = A_0S$. En regardant A_0 comme un opérateur A de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{H}$, on a donc $TA = AS$.

Appliquons maintenant le théorème 1 et la proposition 2 à l'opérateur $T' = T^*|\mathfrak{H}'$. Il résulte qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{H}_0'$ de $\mathfrak{H}'$, invariant pour T' et tel que, en posant $T_0' = T'|\mathfrak{H}_0'$, on ait $m_{T_0'} = m_{T'}$ et que T_0' soit quasi-similaire à un opérateur $S' \in C_0(1)$ dans un espace $\mathfrak{G}'$. Donc il existe une quasi-affinité B_0 de $\mathfrak{G}'$ dans $\mathfrak{H}_0'$ telle que $T_0'B_0 = B_0S'$. Comme $\mathfrak{H}_0' \subset \mathfrak{H}$, on peut regarder B_0 aussi comme un opérateur B de $\mathfrak{G}'$ dans $\mathfrak{H}$; puisque $T_0' \subset T' \subset T^*$, on aura $T^*B = BS'$. En prenant les adjoints on obtient $B^*T = ZB^*$ où B^* est un opérateur de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}'$ et $Z = S'^*$; Z est un opérateur dans $\mathfrak{G}'$, de classe $C_0(1)$ et tel que $m_Z = m_{\tilde{S}'} = m_{\tilde{T}_0'}$, donc m_Z est un diviseur de $m_{\tilde{T}^*}$, c'est-à-dire de m_T. Comme de plus $m_T = m_{T_0} = m_S$, il résulte que m_Z est un diviseur de m_S. Ainsi, il existe une restriction de S à un sous-espace invariant dont la fonction minimum est égale à m_Z, par conséquent (puisqu'il s'agit d'opérateurs de classe $C_0(1)$) cette restriction est unitairement équivalente à Z (cf. [A], remarque à la fin du n° VI. 5. 1). Donc on peut supposer que Z est la restriction de S à un sous-espace $\mathfrak{G}'$ de $\mathfrak{G}$, invariant pour S.

Pour $h_0 \in \mathfrak{H}_0$ et $g' \in \mathfrak{G}'$ on a $(B^*h_0, g') = (h_0, Bg') = (h_0, B_0 g') = 0$ parce que $B_0 g' \in \mathfrak{H}_0' \subset \mathfrak{H}' \perp \mathfrak{H}_0$. Ainsi, $B^*h_0 = 0$, donc $B^*\mathfrak{H}_0 = \{0\}$.

Posons $X = AB^*$. C'est un opérateur borné dans $\mathfrak{H}$, permutant à T. En effet,

$$TAB^* = ASB^* = AZB^* = AB^*T.$$

En vertu de (vi) on a donc $X = \varphi(T)$ avec $\varphi = \dfrac{u}{v} \in N_T$, donc $v(T)X = u(T)$. Cela entraîne

$$u(T_0) = u(T)|\mathfrak{H}_0 = v(T)AB^*|\mathfrak{H}_0 = O,$$

d'où il s'ensuit que u est un multiple de m_{T_0}, donc de m_T. Par conséquent, on a $u(T) = O$, d'où $X = v(T)^{-1}u(T) = O$. Or, comme A est inversible, $AB^* = X = O$ entraîne $B^* = O$, donc $B = O$, $B_0 = O$, ce qui contredit le fait que B_0 est une quasi-affinité de l'espace $\mathfrak{G}' \neq \{0\}$ (dans $\mathfrak{H}_0'$).

Cette contradiction démontre que $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$.

8. Opérateurs quasi-similaires, mais non similaires

1. Les propositions 2 et 3 du numéro 6 établissent la quasi-similitude entre certains opérateurs $T_i \in C_0(N_i)$ $(i = 1, 2)$. Vu les analogies entre les opérateurs des classes $C_0(N)$ et les opérateurs dans les espaces de dimension finie, on peut se demander si cette quasi-similitude est même une similitude? On montrera que cela n'est pas le cas. Notamment, on donnera un exemple d'un opérateur T de classe $C_0(2)$, qui est quasi-similaire, mais non similaire, à un opérateur de classe $C_0(1)$.

Nous commençons par démontrer un fait d'un certain intérêt en soi-même.

Proposition 5. *Soit $T \in C_0(N)$ et soit $\Omega_T(\lambda) = [\omega_{ik}(\lambda)]$ $(i, k = 1, \dots, N)$ l'adjointe algébrique de la matrice de la fonction caractéristique $\Theta_T(\lambda)$. Pour que T soit similaire à un opérateur $S \in C_0(1)$ il est nécessaire qu'il existe des fonctions $x_k(\lambda) \in H^\infty$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik} x_{ik} = 1. \tag{8.1}$$

Démonstration. Supposons que T est dans l'espace $\mathfrak{H}$, S est dans l'espace $\mathfrak{H}'$, et qu'il existe des opérateurs bornés $X\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}'$ et $Y\colon \mathfrak{H}' \to \mathfrak{H}$ tels que

$$SX = XT, \quad TY = YS \quad \text{et} \quad Y = X^{-1}.$$

Comme S est sans multiplicité ($m_S = d_S = \Theta_S$), il en est de même de T (donc $m_T = d_T$), de plus on a $m_S = m_T$. On peut représenter T et S par leurs modèles fonctionnels dans les espaces

$$\mathfrak{H} = H^2(E^N) \ominus \Theta_T H^2(E^N) \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}' = H^2 \ominus m_T H^2, \tag{8.2}$$

ce qui entraîne pour X et Y les représentations

(8. 3) $$X = P_{\mathfrak{H}'}\Phi|\mathfrak{H} \quad \text{et} \quad Y = P_{\mathfrak{H}}\Psi|\mathfrak{H}'$$

moyennant deux fonctions analytiques bornées,

(8. 4) $$\Phi \in H^\infty(E^N, E^1) \quad \text{et} \quad \Psi \in H^\infty(E^1, E^N),$$

telles que

(8. 5) $$\Phi\Theta_T H^2(E^N) \subset \Theta_S H^2 = m_T H^2 \quad \text{et} \quad \Psi\Theta_S H^2 \subset \Theta_T H^2(E^N);$$

cf. [C]. Vu que $XY = I_{\mathfrak{H}'}$, (8. 3) entraîne

(8. 6) $$I_{\mathfrak{H}'} = P_{\mathfrak{H}'}\Phi P_{\mathfrak{H}}\Psi|\mathfrak{H}';$$

comme de plus, par (8. 2) et (8. 5),

$$P_{\mathfrak{H}'}\Phi(I - P_{\mathfrak{H}})\Psi\mathfrak{H}' \subset P_{\mathfrak{H}'}\Phi\Theta_T H^2(E^N) \subset P_{\mathfrak{H}'} m_T H^2 = \{0\},$$

on a aussi

(8. 7) $$I_{\mathfrak{H}'} = P_{\mathfrak{H}'}\Phi\Psi|\mathfrak{H}',$$

donc, pour tout $h' \in \mathfrak{H}'$, $\Phi\Psi h' - h' \in m_T H^2$. En choisissant en particulier $h' = 1 - \overline{m_T(0)} m_T$, on conclut qu'il existe une fonction $u \in H^2$ telle que

(8. 8) $$\Phi\Psi - 1 = m_T u.$$

Pour presque tous les points z du cercle unité

$$|u(z)| = |m_T(z)|\,|u(z)| = |\Phi(z)\Psi(z) - 1| \leqq \|\Phi\|_\infty \|\Psi\|_\infty + 1,$$

d'où $u \in H^\infty$.

En vertu de la première des relations (8. 5) on peut attacher à tout $u^N \in H^2(E^N)$ un $v \in H^2$ de la sorte qu'on ait $\Phi\Theta_T u^N = m_T v$; puisque m_T est une fonction intérieure, on a $\|v\|_{H^2} = \|m_T v\|_{H^2} = \|\Phi\Theta_T u^N\|_{H^2} \leqq \|\Phi\|_\infty \|u^N\|_{H^2(E^N)}$, donc $v = \Phi_1 u^N$ définit un opérateur (linéaire) borné $\Phi_1 \colon H^2(E^N) \to H^2$. Il est manifeste que Φ_1 permute à la multiplication par z, d'où il s'ensuit qu'il existe une fonction $\Phi_1(\lambda) \in H^\infty(E^N, E^1)$ de la sorte que $(\Phi_1 u^N)(\lambda) = \Phi_1(\lambda) u^N(\lambda)$. Donc on a

$$\Phi(\lambda)\Theta_T(\lambda) = m_T(\lambda)\Phi_1(\lambda),$$

d'où

$$m_T\Phi = \Phi m_T = \Phi\Theta_T\Omega_T = m_T\Phi_1\Omega_T$$

et par conséquent

(8. 9) $$\Phi = \Phi_1\Omega_T.$$

En combinant (8. 9) avec (8. 8) et en observant que $m_T = d_T = (\Omega_T\Theta_T)_{11}$, on obtient

$$\Phi_1\Omega_T\psi - (\Omega_T\Theta_T)_{11}u = 1.$$

Or, les fonctions (scalaires ou opératorielles) u, Θ_T, Φ_1 et Ψ étant analytiques et bornées dans le disque unité, il en résulte l'existence des fonctions $x_{ik} \in H^\infty$, vérifiant (8. 2).

Cela achève la démonstration de la proposition 5.

2. Envisageons maintenant les fonctions intérieures

$$u(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right) \quad \text{et} \quad v(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k-\lambda}{1-a_k\lambda}$$

où $a_k = 1-1/k^2$; u et v sont premières entre elles. La fonction matricielle

$$\Theta(\lambda) = \begin{bmatrix} u(\lambda)/\sqrt{2} & u(\lambda)/\sqrt{2} \\ v(\lambda)/\sqrt{2} & -v(\lambda)/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

est intérieure des deux côtés, et contractive pure. Donc il existe un opérateur $T \in C_0(2)$ dont la fonction caractéristique coïncide avec $\Theta(\lambda)$. Comme l'adjointe algébrique de $\Theta(\lambda)$ est la matrice

$$\Theta^A(\lambda) = \begin{bmatrix} -v(\lambda)/\sqrt{2} & -v(\lambda)/\sqrt{2} \\ -u(\lambda)/\sqrt{2} & u(\lambda)/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

dont les éléments sont premiers entre eux, on a $m_T(\lambda) = d_T(\lambda)$, donc T est sans multiplicité et par conséquent quasi-similaire à l'opérateur $S \in C_0(1)$ pour lequel $m_S = m_T$. Mais T n'est pas similaire à S puisque la relation

$$u(\lambda)x(\lambda) + v(\lambda)y(\lambda) = 1 \qquad (x, y \in H^\infty)$$

est impossible; en effet, $v(a_k) = 0$ pour $k = 1, 2, \cdots$ et $u(a_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

Ouvrages cités

Béla Sz.-Nagy et Ciprian Foiaş

[A] *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

[B] Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.*, **31** (1968), 35—42.

[C] Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 1—17.

Donald Sarason

[S] Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 179—203.

(Reçu le 1. février 1968)